

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 24.11.2023 15:19:54  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП:

С.М. Дудаков

2022 г.



Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Системный анализ

Для студентов 2, 3 курсов

очная форма

Составитель: к.ф.-м.н. В.Н. Бобышев

Тверь, 2022

## **I. Аннотация**

### **1. Цель и задачи дисциплины**

Целью освоения дисциплины является:

- знакомство с основными методами функционального анализа,
- развитие умений применять эти методы к конкретным математическим объектам в других областях математики, математической физики, экономики.

Задачами освоения дисциплины являются: формирование у студентов

- Способности демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой;
- Способности приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
- Способности понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат;
- Умения использовать проблемно-ориентированное ПО для проведения расчетов, численных экспериментов, визуализации результатов;
- Умения исследовать и решать формализованные задачи, используя аналитические методы и специализированное ПО.

### **2. Место дисциплины в структуре ООП**

Функциональный анализ относится к разделу «Математический» обязательной части Блока 1.

Функциональный анализ – это один из важнейших разделов математики, которому уделяется большое внимание в образовательных программах ведущих мировых университетов. По своему содержанию функциональный анализ тесно связан с математическим анализом, геометрией и алгеброй, вычислительной математикой и другими важными разделами математики. Методы функционального анализа находят широкое приложение при изучении физических, социально-экономических и финансовых процессов.

Для успешного усвоения курса необходимы знания основ математического анализа, алгебры и геометрии.

В процессе изучения дисциплины студенты должны ознакомиться с основными понятиями функционального анализа, изучить разделы функционального анализа, необходимые для использования в других математических дисциплинах; математические методы решения профессиональных задач, уметь применять математические методы при решении профессиональных задач, овладеть математическим аппаратом, необходимым для профессиональной деятельности.

По окончании курса студенты должны быть способны применять изученные методы в собственных исследованиях и корректно интерпретировать полученные результаты.

Методы функционального анализа используются в курсах обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теория вероятностей и математическая статистика, оптимальное управление, экономика и других.

**3. Объем дисциплины: 6 зачетных единиц, 216 академических часов, в том числе:**

**контактная аудиторная работа:** всего 124 часа, из них лекции 62 часа, в т.ч. практическая подготовка 31 час; практические занятия 62 часа, в т.ч. практическая подготовка 31 час;

**контактная внеаудиторная работа:** контроль самостоятельной работы 0 часов, в том числе курсовая работа 0 часов;

**самостоятельная работа:** 92 часа, в том числе контроль 36 часов.

**4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

<b>Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)</b>	<b>Планируемые результаты обучения по дисциплине</b>
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 Использует базовые знания в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности ОПК-1.3 Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических и естественных наук к решению задач профессиональной деятельности

**5. Форма промежуточной аттестации:** зачет в 4 семестре, экзамен в 5 семестре.

**7. Язык преподавания** русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Контроль самостоятельной работы (в том числе курсовая работа) (час.)	Самостоятельная работа (час.), в т.ч. контроль
		Лекции (час.)		Практические занятия (час.)			
		всего	в т.ч. практическая	всего	в т.ч. практическая		
Теория множеств	18	6	3	6	3		6
Топологические пространства	17	6	3	6	3		5
Метрические пространства	29	10	5	10	5		9
Нормированные пространства	29	10	5	10	5		9
Евклидовы и гильбертовы пространства	32	8	4	8	4		16
Линейные функционалы и линейные операторы	36	10	5	10	5		16
Спектральная теория	17	4	2	4	2		9
Обобщенные функции	18	4	2	4	2		10
Интегральные уравнения	20	4	2	4	2		12
<i>Итого</i>	<i>216</i>	<i>62</i>	<i>31</i>	<i>62</i>	<i>31</i>	<i>0</i>	<i>92</i>

**III. Образовательные технологии**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Вид занятия	Образовательные технологии
Теория множеств	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач

Топологические пространства	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Метрические пространства	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Нормированные пространства	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Евклидовы и гильбертовы пространства	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Линейные функционалы и линейные операторы	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Спектральная теория	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Обобщенные функции	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
Интегральные уравнения	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: традиционные лекции, практические занятия в диалоговом режиме, выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

Дисциплина предусматривает выполнение контрольных работ, письменных домашних заданий, расчетно-графических работ.

#### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации обучающихся**

Для проведения текущей и промежуточной аттестации:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

1. Теорема Кантора-Бернштейна.
2. Простейшие применения принципа сжимающих отображений
3. Непрерывные отображения топологических пространств.
4. Существование ортогональных базисов, ортогонализация
5. Линейные функционалы на нормированных пространствах

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Дан правильный развернутый ответ – 2 балла;

Ответ содержит неточности – 1 балл.

Ответ не правильный или не дан – 0 баллов.

ОПК-1.2 Использует базовые знания в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности

1.  $Ax(t) = x(\sqrt{t})$  Исследовать оператор на линейность и непрерывность в  $C[0;1]$ . Вычислить норму. Является ли он вполне непрерывным?
2.  $F(x) = \int_0^1 x(t^2) dt$ . Исследовать функционал на линейность и непрерывность в  $C[0;1]$ . Вычислить норму.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Задача решена полностью - 6 баллов;

Задача содержит неточности и незначительные ошибки - 4 балла;

Решение содержит значительные ошибки - 2 балла.

Решение содержит грубые ошибки или не решалась - 0 баллов.

ОПК-1.3 Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических и естественных наук к решению задач профессиональной деятельности

1. Построить 2 различных топологических пространства  $X, Y$  на множестве из 4 точек, охарактеризовать их по свойствам отделимости, и построить непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$ .
2. Найти четыре первых члена процесса ортогонализации последовательности  $1, t, t^2, t^3, \dots$  в пространстве:

$$H^1[-1,0], \text{ в котором скалярное произведение } (x,y) = \int_{-1}^0 (x(t)y(t) + x'(t)y'(t)) dt$$

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Задача решена полностью - 6 баллов;

Задача содержит неточности и незначительные ошибки - 4 балла;

Решение содержит значительные ошибки - 2 балла.

Решение содержит грубые ошибки или не решалась - 0 баллов.

## **V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **1) Рекомендуемая литература**

#### **Основная литература:**

1.Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник / В.А. Треногин. - 3-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2002. - 488 с. - ISBN 5-9221-0272-9; [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613>

2.Асташова И.В. Функциональный анализ: учебно-методический комплекс / И.В. Асташова, В.А. Никишкин. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Евразийский открытый институт, 2011. - 110 с. - ISBN 978-5-374-00486-1; [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90883>

3. Гисин, В. Б. Функциональный анализ : учебное пособие / В. Б. Гисин, П. И. Кацьло, Е. В. Маевский. — Москва: Финансовый университет, 2014. — 220 с. — ISBN 978-5-7942-1128-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/152027>

#### **Дополнительная литература:**

1.Ревина С.В. Функциональный анализ в примерах и задачах: учебное пособие / С.В. Ревина, Л.И. Сазонов. - Ростов-н/Д: Издательство Южного федерального университета, 2009. - 120 с. - библиогр. с: С. 118-119. - ISBN 978-5-9275-0683-5; [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=240944>

2.Крепкогорский В.Л. Функциональный анализ: учебное пособие / В.Л. Крепкогорский. - Казань: Издательство КНИТУ, 2014. - 116 с.: табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1650-8; [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428727>

### **2) Программное обеспечение**

<b>Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 249 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)</b>	
Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
FidesysBundle 1.4.43 x64	Акт приема передачи по договору №02/12-13 от 16.12.2013
Google Chrome	бесплатно
JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus 1.4.0	бесплатно

Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
MiKTeX 2.9	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно
Notepad++	бесплатно
OpenOffice	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64 bit)	бесплатно
R for Windows 3.3.2	бесплатно
STATGRAPHICS Centurion XVI.П	Акт приема-передачи № Tr024185 от 08.07.2010
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно

1. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы
  1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com);
  2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>;
  3. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>.
2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины
  - Сайт поддержки учебного процесса по дисциплине: <http://prog.tversu.ru>
  - Виртуальная образовательная среда ТвГУ (<http://moodle.tversu.ru>)
  - Научная библиотека ТвГУ (<http://library.tversu.ru>)
  - Сайт ТвГУ (<http://university.tversu.ru>)

## VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся зачетом, по итогам семестра составляет 100 баллов (50 баллов - 1-й модуль и 50 баллов - 2-й модуль).



Студенту, набравшему 40 баллов и выше по итогам работы в семестре, в экзаменационной ведомости и зачетной книжке выставляется оценка «зачтено». Студент, набравший до 39 баллов включительно, сдает зачет.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 баллов (30 баллов - 1-й модуль и 30 баллов - 2-й модуль).

Обучающемуся, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55–57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премияльные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

В каждом семестре проводятся 3 контрольных мероприятия, распределение баллов между которыми составляет 30/30/40. Контрольные работы проводятся в письменной форме.

### **Контрольная работа № 1 (4 семестр).**

1. Верно ли утверждение (доказать или опровергнуть):  $A \cup B = B \cup A$ .
2. Верно ли утверждение (доказать или опровергнуть):  $A \cap B = B \cap A$ .
3. Верно ли утверждение (доказать или опровергнуть):  $A \setminus B = B \setminus A$ .
4. Верно ли утверждение (доказать или опровергнуть):  $A \Delta B = B \Delta A$ .
5. Верно ли утверждение (доказать или опровергнуть) для  $f : X \rightarrow Y$ :  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
6. Верно ли утверждение (доказать или опровергнуть) для  $f : X \rightarrow Y$ :  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
7. Верно ли утверждение (доказать или опровергнуть) для  $f : X \rightarrow Y$ :  $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$

8. Верно ли утверждение (доказать или опровергнуть) для  $f : X \rightarrow Y$ :  $f(A \Delta B) \subset f(A) \Delta f(B)$
9.  $f : X \rightarrow Y$  непрерывное отображение «на». Тогда, если  $A$  – всюду плотно в  $X$ , то  $f(A)$  – всюду плотно в  $Y$ .

**Контрольная работа № 2 (4 семестр).**

1. Может ли шар радиуса 4 быть собственным подмножеством шара радиуса 3?
2. Доказать, что если шар радиуса 7 содержится в шаре радиуса 3, то они совпадают.
3. Доказать, что открытый шар в метрическом пространстве является открытым множеством.
4. Построить пример подпространства  $M \subset R^2$ , в котором:  
существует открытый шар, являющийся замкнутым множеством, но не замкнутым шаром;  
существует замкнутый шар, являющийся открытым множеством, но не открытым шаром.
5. Доказать, что замыкание открытого шара в метрическом пространстве содержится в закрытом шаре, но может с ним не совпадать.
6. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  – замкнутые множества в метрическом пространстве,  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ . Построить открытые множества  $U_1 \supset F_1, U_2 \supset F_2$  такие, что  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .
7. Доказать, что  $\rho(x, A) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x$  является точкой прикосновения множества  $A$ .
8. Построить пример замкнутого множества  $A$  и точки  $x$  таких, что для любой точки  $y \in A$  выполнено  $\rho(x, y) > \rho(x, A)$ , т. е. в  $A$  не существует ближайшего элемента к точке  $x$ .
9. Является ли  $\rho(x, A)$  непрерывной функцией от  $x$ ?
10. Доказать, что для любого множества  $A$  множество точек, удовлетворяющих условию  $\rho(x, A) < \varepsilon$ , открыто, а множество точек, удовлетворяющих условию  $\rho(x, A) \leq \varepsilon$ , замкнуто.

Показать, что векторные пространства — нормированные относительно указанных норм (11—19):

11.  $l^\infty$ ,  $\|x\| = \sup_k |x_k|$ .

12.с,  $\|x\| = \sup_k |x_k|$ .

13.  $l_0^\infty$ ,  $\|x\| = \sup_k |x_k|$ .

14.  $L^p(a; b)$ ,  $\|x\| = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$ .

15.  $C[a; b]$ ,  $\|x\| = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ .

16.  $L^\infty(a; b)$ ,  $\|x\| = \text{ess sup}_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ .

$$17. B(R), \|x\| = \sup_{t \in R} |x(t)|.$$

$$18. C^l[a; b], \|x\| = \sum_{k=0}^l \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|.$$

$$19. Lip[a; b], \|x\| = \sup_{(t,s) \in [a,b] \times [a,b]} \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|} + \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

### Контрольная работа № 3 (5 семестр).

1. Сложение в гильбертовом пространстве непрерывно.
2. Умножение на комплексные числа непрерывно.
3. Скалярное произведение непрерывно. Проверить тождества(4—5):
4.  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$  (равенство параллелограмма).
5.  $4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2$  (поляризационное тождество).
6. Доказать, что в банаховом пространстве над  $\mathbb{R}$  можно ввести скалярное произведение, для которого  $\|x\|^2 = (x, x)$  тогда и только тогда, когда при любых  $x, y$  выполняется равенство

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Проверить, что следующие векторные пространства являются гильбертовыми (7—8):

$$7. l^2 = \left\{ x; x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}, \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty \right\} \text{ со скалярным произведением } (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k,$$

где  $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots\}$ .

8.  $L^2(S, \mu)$  со скалярным произведением

$$(x, y) = \int x(s) \overline{y(s)} d\mu.$$

Являются ли линейными следующие функционалы в  $C[0,1]$  (9-17):

$$9. F(x) = x\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$10. F(x) = \int_0^1 x(t) \operatorname{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt.$$

$$11. F(x) = \int_0^1 t^{1/2} x(t^2) dt.$$

$$12. F(x) = \int_0^1 t^{-1/3} x(t) dt.$$

$$13. F(x) = \int_0^1 x(t^2) dt.$$

$$14. F(x) = x'(t_0).$$

$$15. F(x) = \int_0^1 |x(t)| dt.$$

$$16. F(x) = \max_{0 \leq t \leq 1} x(t).$$

$$17. F(x) = \int_0^1 x^2(t) dt$$

18. Какие из функционалов 9-17 непрерывны в  $C[0;1]$ ? Вычислить их нормы.

19. Какие из функционалов 9-17 непрерывны в  $L^2(0;1)$ ? Вычислить их нормы.

Найти нормы следующих функционалов в пространстве  $C_0$ , если они ограничены,  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$  (20—23):

$$20. f(x) = x_1.$$

$$21. f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

$$22. f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

$$23. f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^2}.$$

#### Контрольная работа № 4 (5 семестр).

Являются ли вполне непрерывными следующие операторы в пространстве  $C[0,1]$ ? В пространстве  $L^2(0,1)$  (1—12)?

$$1. Ax(t) = \int_0^1 x(s) ds.$$

$$2. Ax(t) = \int_0^1 (ts + t^2 s^2) x(s) ds.$$

$$3. Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{|\sin t - \sin s|}} ds.$$

$$4. Ax(t) = \int_0^1 tg \frac{1}{\sqrt{|t-s|}} x(s) ds.$$

$$5. Ax(t) = \int_0^1 tg \frac{\pi}{2} (t-s) x(s) ds.$$

$$6. Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{s-1/2} ds.$$

$$7. Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{t-s} ds.$$

$$8. Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{|t-s|^\alpha} ds.$$

$$9. Ax(t) = x(t^2).$$

$$10. Ax(t) = \int_0^1 x(s^2) ds.$$

$$11. Ax(t) = x(\sqrt{t}).$$

$$12. Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(\sqrt{s})}{s^{5/4}} ds.$$

### Рубежный контроль

#### Вопросы к зачету по курсу "Функциональный анализ" (4 семестр)

1. Понятие множества.
2. Операции над множествами.
3. Отображения множеств.
4. Понятие функции, прообраз, обратная функция.
5. Эквивалентность множеств.
6. Конечные и бесконечные множества.
7. Счетные множества.
8. Несчетность множества действительных чисел.
9. Теорема Кантора-Бернштейна.
10. Понятие мощности множества.
11. Аксиома выбора.
12. Метрическое пространство.
13. Неравенства Минковского, Гельдера.
14. Непрерывные отображения метрических пространств
15. Изометрия
16. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах
17. Замыкание в метрических пространствах
18. Сходимость в метрических пространствах
19. Плотные множества
20. Полные метрические пространства
21. Теорема о вложенных шарах
22. Теорема Бэра
23. Принцип сжимающих отображений
24. Простейшие применения принципа сжимающих отображений
25. Компактность в метрических пространствах
26. Теорема Арцела
27. Определение и примеры линейных пространств
28. Линейная зависимость
29. Подпространства линейного пространства
30. Определение и примеры топологических пространств.
31. Открытые и замкнутые множества.
32. Сравнение топологий.
33. Определяющие системы окрестностей.
34. База топологии.
35. Аксиомы счетности.
36. Непрерывные отображения топологических пространств.
37. Гомеоморфизм топологических пространств.
38. Аксиомы отделимости.
39. Понятие компактности.
40. Непрерывные отображения компактных пространств.

41. Непрерывные функции на компактных пространствах.
42. Нормированные пространства
43. Подпространства нормированного пространства
44. Евклидовы пространства
45. Существование ортогональных базисов, ортогонализация
46. Характеристическое свойство евклидовых пространств

### **Вопросы к экзамену по курсу "Функциональный анализ" (5 семестр)**

1. Понятие множества.
2. Операции над множествами.
3. Отображения множеств.
4. Понятие функции, прообраз, обратная функция.
5. Эквивалентность множеств.
6. Конечные и бесконечные множества.
7. Счетные множества.
8. Несчетность множества действительных чисел.
9. Теорема Кантора-Бернштейна.
10. Понятие мощности множества.
11. Аксиома выбора.
12. Метрическое пространство.
13. Неравенства Минковского, Гельдера.
14. Непрерывные отображения метрических пространств
15. Изометрия
16. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах
17. Замыкание в метрических пространствах
18. Сходимость в метрических пространствах
19. Плотные множества
20. Полные метрические пространства
21. Теорема о вложенных шарах
22. Теорема Бэра
23. Принцип сжимающих отображений
24. Простейшие применения принципа сжимающих отображений
25. Компактность в метрических пространствах
26. Теорема Арцела
27. Определение и примеры линейных пространств
28. Линейная зависимость
29. Подпространства линейного пространства
30. Линейные функционалы
31. Геометрический смысл линейного функционала
32. Выпуклые множества и выпуклые тела
33. Однородно-выпуклые функционалы
34. Функционал Минковского
35. Теорема Хана-Банаха в линейных пространствах
36. Отделимость выпуклых множеств в линейном пространстве

37. Определение и примеры топологических пространств.
38. Открытые и замкнутые множества.
39. Сравнение топологий.
40. Определяющие системы окрестностей.
41. База топологии.
42. Аксиомы счетности.
43. Непрерывные отображения топологических пространств.
44. Гомеоморфизм топологических пространств.
45. Аксиомы отделимости.
46. Понятие компактности.
47. Счетная компактность.
48. Непрерывные отображения компактных пространств.
49. Непрерывные функции на компактных пространствах.
50. Нормированные пространства
51. Подпространства нормированного пространства
52. Теорема Банаха—Штейнгауза
53. Теорема об открытом отображении
54. Теорема о замкнутом графике
55. Евклидовы пространства
56. Существование ортогональных базисов, ортогонализация
57. Неравенство Бесселя
58. Замкнутые ортогональные системы
59. Полные евклидовы пространства
60. Теорема Рисса-Фишера
61. Гильбертово пространство
62. Теорема об изоморфизме
63. Подпространства, ортогональные дополнения, прямая сумма
64. Характеристическое свойство евклидовых пространств
65. Линейные функционалы на нормированных пространствах
66. Теорема Хана-Банаха в нормированном пространстве
67. Определение сопряженного пространства
68. Сильная топология в сопряженном пространстве
69. Примеры сопряженных пространств
70. Общий вид линейного функционала в евклидовом пространстве.
71. Второе сопряженное пространство
72. Слабая топология и слабая сходимость в линейном топологическом пространстве
73. Слабая сходимость в нормированных пространствах
74. Слабая топология и слабая сходимость в сопряженном пространстве
75. Ограниченные множества и сопряженном пространстве
76. Определение и примеры линейных операторов
77. Непрерывность и ограниченность
78. Сумма и произведение операторов
79. Обратный оператор, обратимость
80. Сопряженные операторы

81. Сопряженный оператор в евклидовом пространстве
82. Самосопряженные операторы
83. Спектр оператора
84. Резольвента
85. Функциональное исчисление непрерывных функций
86. Спектральная теорема
87. Определение и примеры компактных операторов
88. Основные свойства компактных операторов
89. Собственные значения компактного оператора
90. Компактные операторы в гильбертовом пространстве
91. Самосопряженные компактные операторы
92. Неограниченные операторы
93. Области определения, графики, сопряженные операторы и спектр
94. Симметрические и самосопряженные операторы
95. Основной критерий самосопряженности
96. Спектральная теорема

### **Задачи для самостоятельной работы**

#### **Теория множеств**

1. Доказать с помощью теоремы Кантора-Бернштейна эквивалентность плоскости и замкнутого круга на плоскости.
2. На плоскости задано множество попарно непересекающихся кругов. Какой может быть мощность этого множества.

#### **Топологические пространства**

1.  $X$  – регулярное топологическое пространство,  $A$  – компактное подмножество  $X$ ,  $U$  – окрестность  $A \Rightarrow \exists$  замкнутая окрестность  $V$  множества  $A$ :  $V \subseteq U$
2. Построить 2 различных топологических пространства на множестве из 4 точек, охарактеризовать их по свойствам отделимости, и построить непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$ .

#### **Метрические пространства**

1. Доказать, что для любых четырех точек  $x, y, z, t$  метрического пространства  $(X, \rho)$  справедливы неравенства:
 
$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y);$$

$$|\rho(x, z) - \rho(y, t)| \leq \rho(x, y) + \rho(z, t) \text{ (неравенство четырехугольника).}$$
2. Доказать, что аксиомы метрического пространства эквивалентны следующим двум аксиомам:
 
$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z).$$



## Нормированные пространства

Показать, что векторные пространства — нормированные относительно указанных норм (13—23):

1.  $R^n$ ,  $\|x\| = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$
2.  $l^p$ ,  $\|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$ ,  $(1 \leq p < \infty)$ .

## Евклидовы и гильбертовы пространства

1. Рассмотрим векторное пространство линейных комбинаций периодических функций с различными периодами  $x: R \rightarrow C$  со скалярным произведением

$$(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(s) \overline{y(s)} ds$$

и пополним его по норме, определяемой этим произведением. Установить несепарабельность такого гильбертова пространства.

2. Доказать теорему Пифагора: «если  $(x_k, x_l) = 0$ ,  $k \neq l$  и  $x = \sum_{k=1}^n x_k$ , то

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \text{ »}$$

## Линейные функционалы и линейные операторы

1. Являются ли линейными следующие функционалы в  $C[0,1]$ :

$$F(x) = \int_0^1 x(t) \sin t dt.$$

2. Являются ли вполне непрерывными следующие операторы в пространстве  $C[0,1]$ ? В пространстве  $L^2(0,1)$ ?

$$Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}} ds.$$

## Спектральная теория

1. Найти спектр оператора  $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ,  $Ax(t) = tx(t)$ .

## Обобщенные функции

1. Найти производную функции Хевисайда.

## Интегральные уравнения

1. Решить интегральное уравнение  $x(t) = \lambda \int_0^1 (t-1)x(s) ds + t$

## VII. Материально-техническое обеспечение

Для аудиторной работы.

Учебная аудитория № 310 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, меловая доска.
---	--------------------------------------

Учебная аудитория № 304 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, экран, комплект аудиотехники (радиосистема, стационарный микрофон с настольным держателем, усилитель, микшер, акустическая система), проектор, ноутбук.
Учебная аудитория № 318 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, экран, проектор.
Учебная аудитория № 308 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, экран проектор.

Для самостоятельной работы.

Помещение для самостоятельной работы обучающихся: Компьютерный класс №2 факультета ПМиК № 249 <i>170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35</i>	Набор учебной мебели, компьютер, проектор.
---	--

#### Х. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины.

№ п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1.	I. 3. Объем дисциплины	Выделение часов на практическую подготовку	От 29.10.2020 года, протокол № 3 ученого совета факультета
2.	II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий	Выделение часов на практическую подготовку по темам	От 29.10.2020 года, протокол № 3 ученого совета факультета

3.	11. 2) Программное обеспечение	Внесены изменения в программное обеспечение	От 29.09.2022 года, протокол № 2 ученого совета факультета
4.	13. Материально-техническое обеспечение	Внесены изменения в материально-техническое обеспечение аудиторий	От 29.09.2022 года, протокол № 2 ученого совета факультета
5.	11. 2) Программное обеспечение	Внесены изменения в список ПО	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета
6.	V. 1) Рекомендуемая литература	Обновление ссылок на литературу	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета